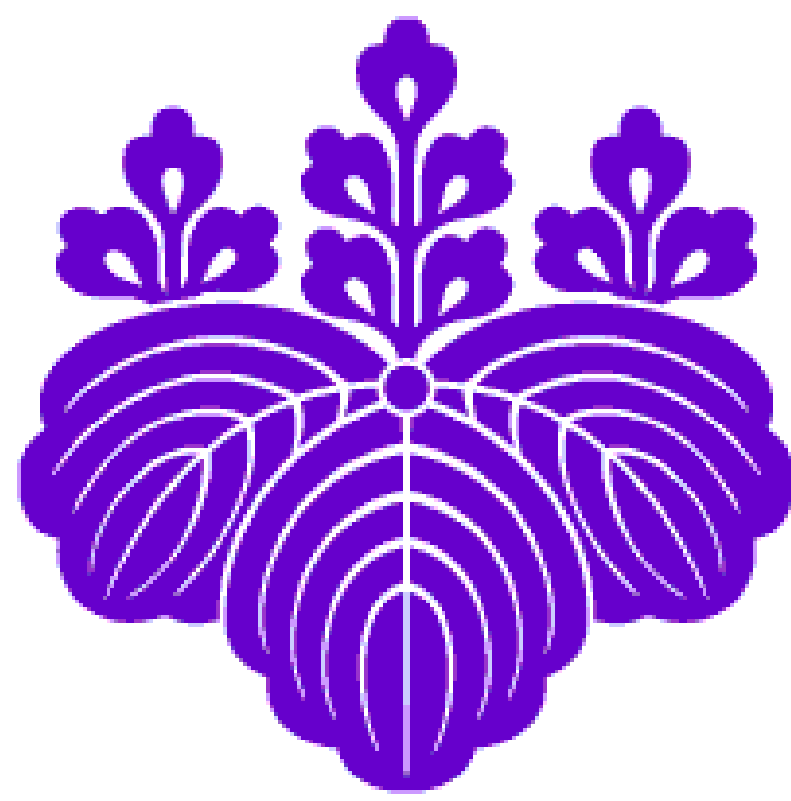




研究テーマ:
無限次元力学系の数値解析と計算機援用証明
info@taklab.org

散逸型偏微分方程式

複素Ginzburg-Landau方程式:

$$u_t = e^{i\theta} (u_{xx} + u^2), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Swift-Hohenberg方程式: 流体のモデル

$$u_t = \sigma u - (1 + \Delta)^2 u - u^3.$$

Ohta-Kawasaki方程式: 材料化学のモデル

$$u_t = -\Delta (\varepsilon^2 \Delta u + u - u^3) - \sigma(u - \lambda).$$

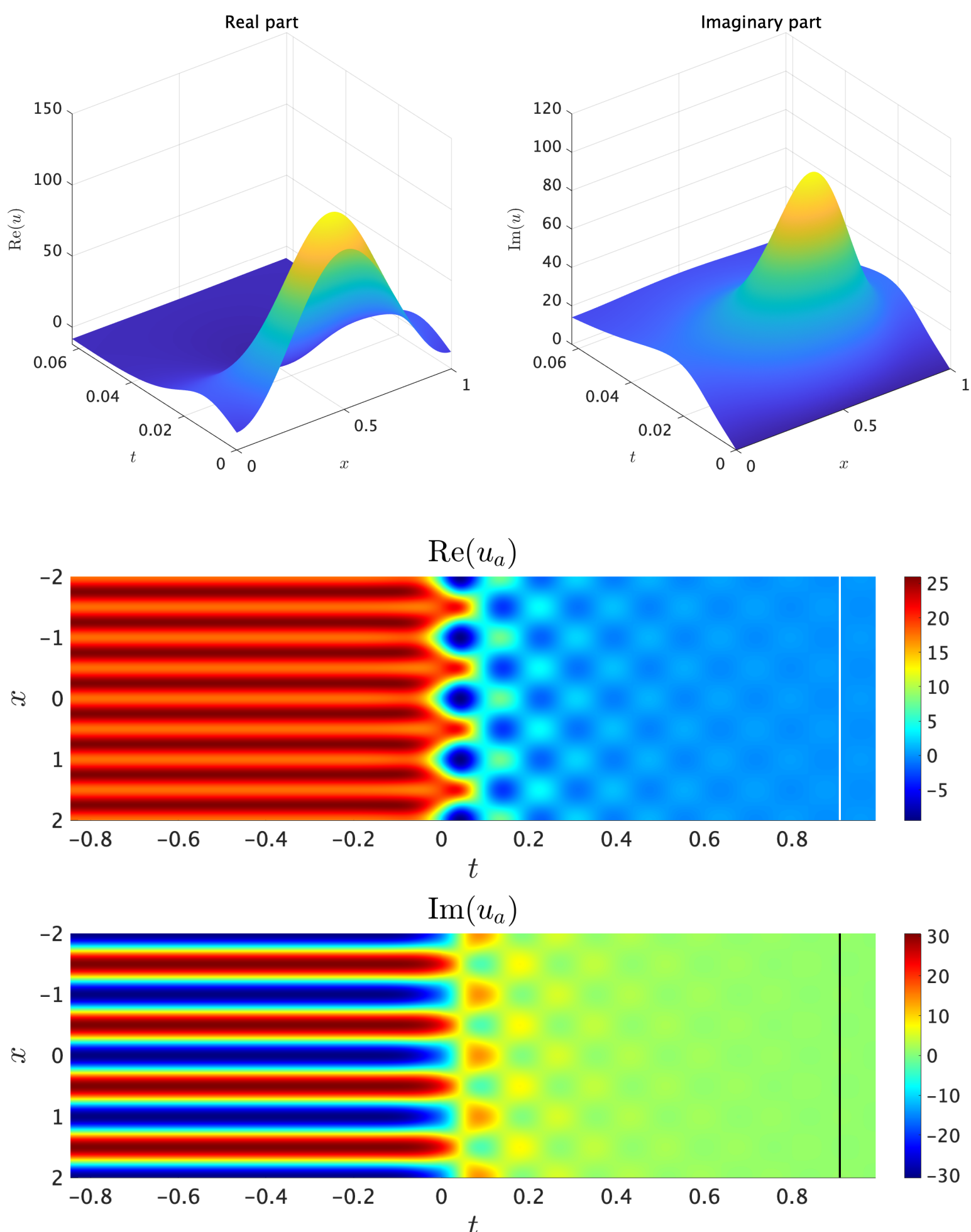
Phase field crystalモデル: 原子結晶の進展モデル

$$u_t = (u_{xxxx} + 2u_{xx} + (1 - \alpha)u + u^3)_{xx}.$$

Navier-Stokes方程式: 流体力学の基礎方程式

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

などの時間発展を伴う偏微分方程式の大域的なダイナミクスと時間大域解の存在を計算機援用証明する.

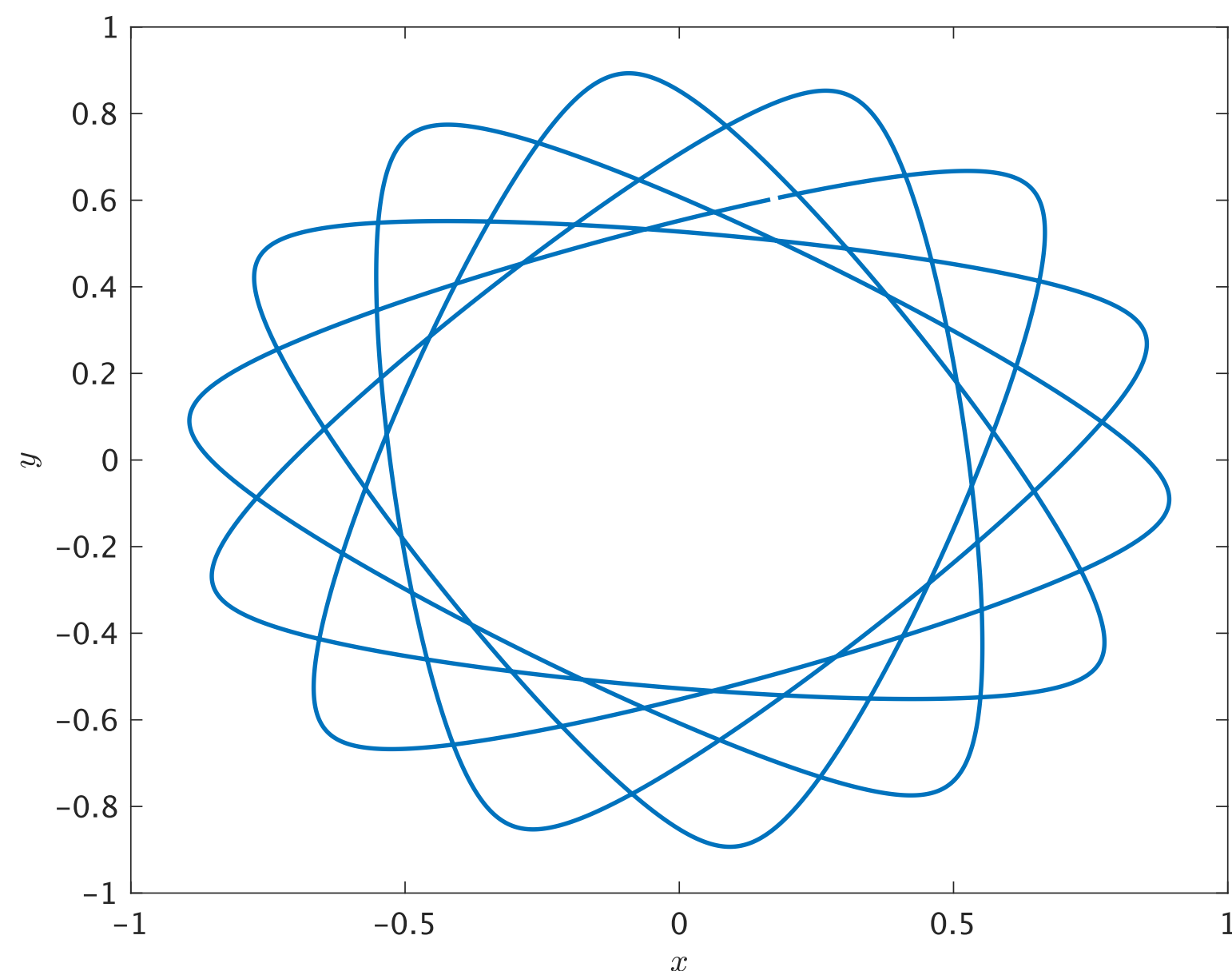


遅延微分方程式

遅延微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t - \tau))$$

の初期値問題・境界値問題の解を精度保証付きで得る. 遅延微分方程式は時間発展する関係式に過去の情報を参照することで現象に対する数理モデルの表現能力が高いとされる.

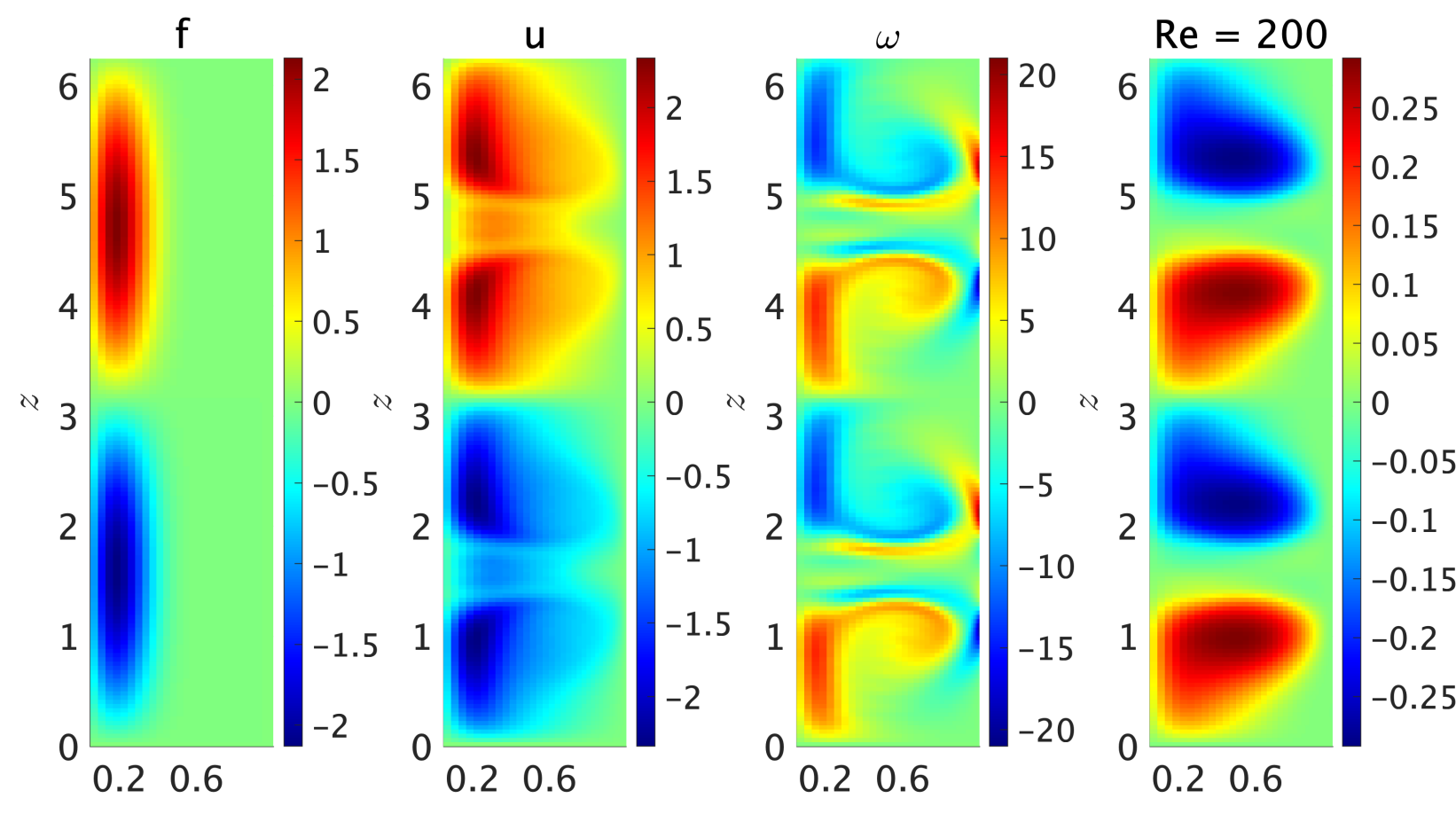


時間周期解・平衡解

時間周期解: $x(t + L) = x(t)$ や 無限次元力学系 $\dot{u} = \mathcal{L}u + \mathcal{QN}(u)$ の平衡解を フーリエ級数

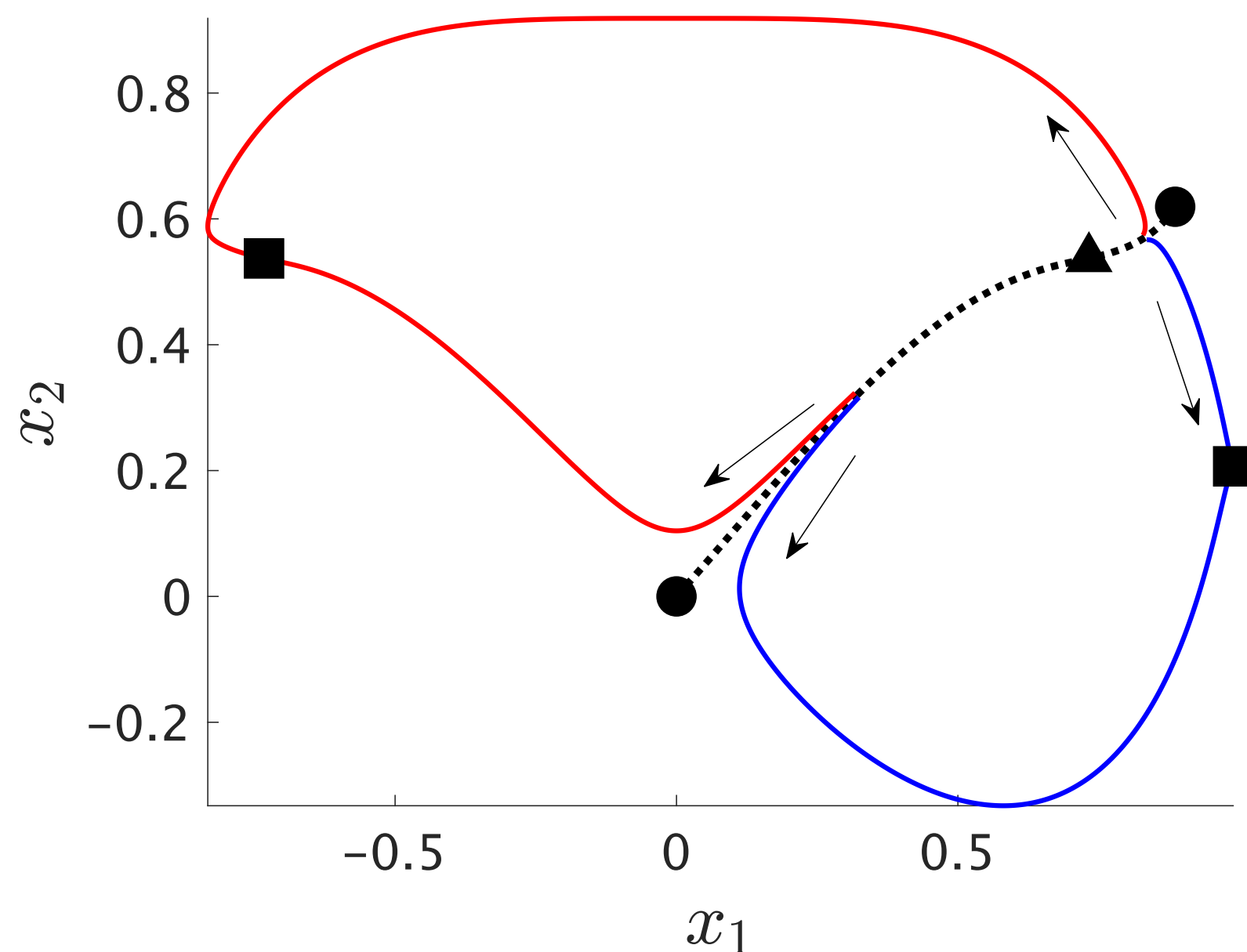
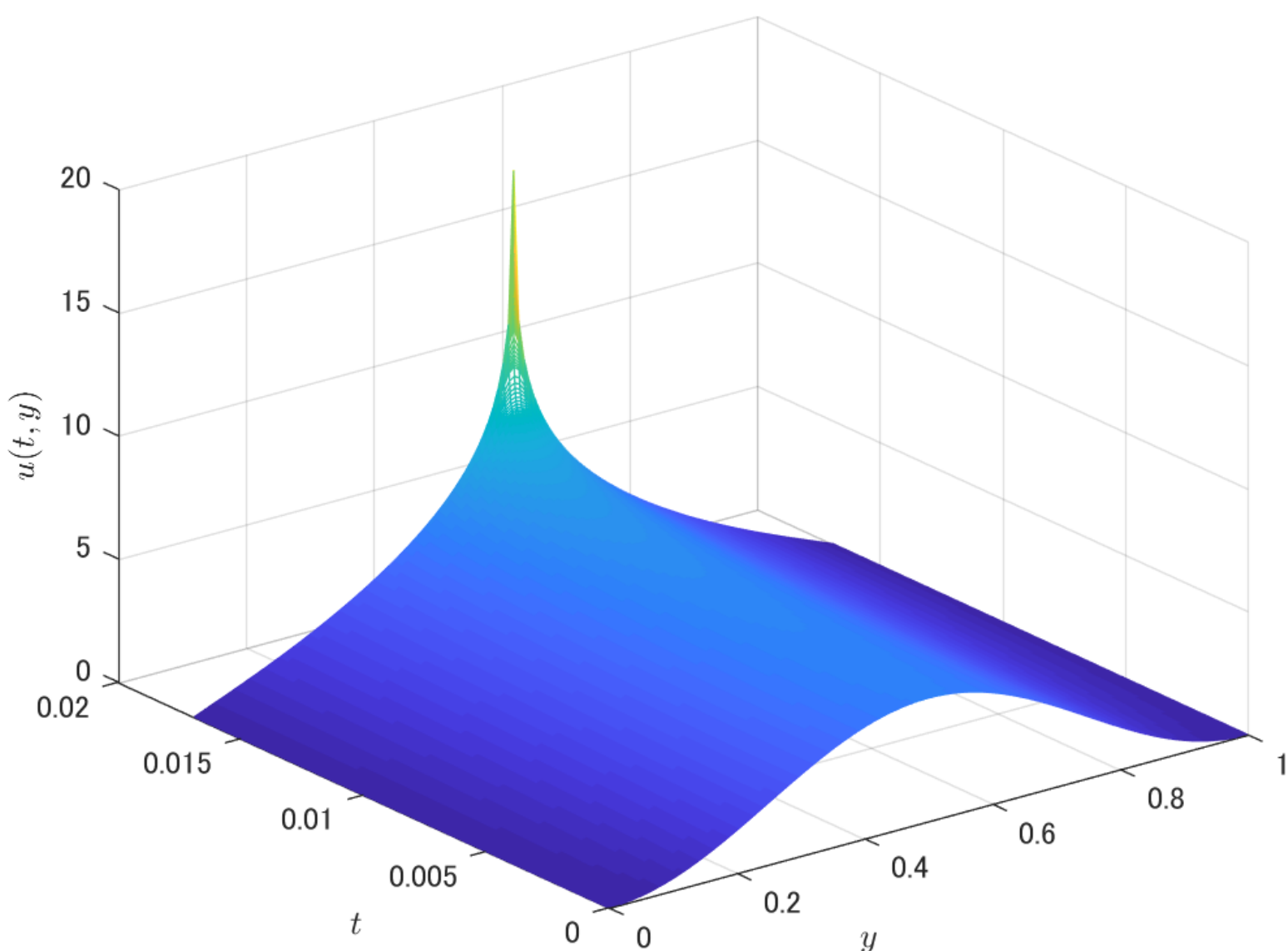
$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{ik\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{L}$$

の係数 $(u_k) \in \ell^1$ に対する零点探索問題とする.



微分方程式の爆発解

微分方程式の解の有限時間爆発を精度保証付き 新たに提唱し, 解の爆発を引き起こすのは初期数値計算で捉える. 時空間の特異性を解消する 値の大きさではなく方程式の構造であることを ことで, 実数区間の中に解の爆発時刻を厳密に 明らかにした. 解の爆発は数理モデルの破綻を 包含する. さらに爆発解の安定性という概念を 意味し, 数理モデルの検証において有効.



非自励的半群による厳密な数値求積法

無限次元力学系の初期値問題

$$\dot{u} = \mathcal{L}u + \mathcal{QN}(u), \quad u(0) = \varphi$$

を写像 $F: X \rightarrow Y \times \ell^1$ の零点探索問題

$$(F(u))(t) = (u(t) - \mathcal{L}u(t) - \mathcal{QN}(u(t)), u(0) - \varphi) = 0$$

として定式化する. 簡易ニュートン写像は

$$(T(u))(t)$$

$$= U(t, 0)\varphi + \int_0^t U(t, s)\mathcal{Q}(\mathcal{N}(u(s)) - D\mathcal{N}(\bar{u})u(s)) ds.$$

ここで $\{U(t, s)\}_{0 \leq s \leq t \leq \tau}$ は発展作用素といい

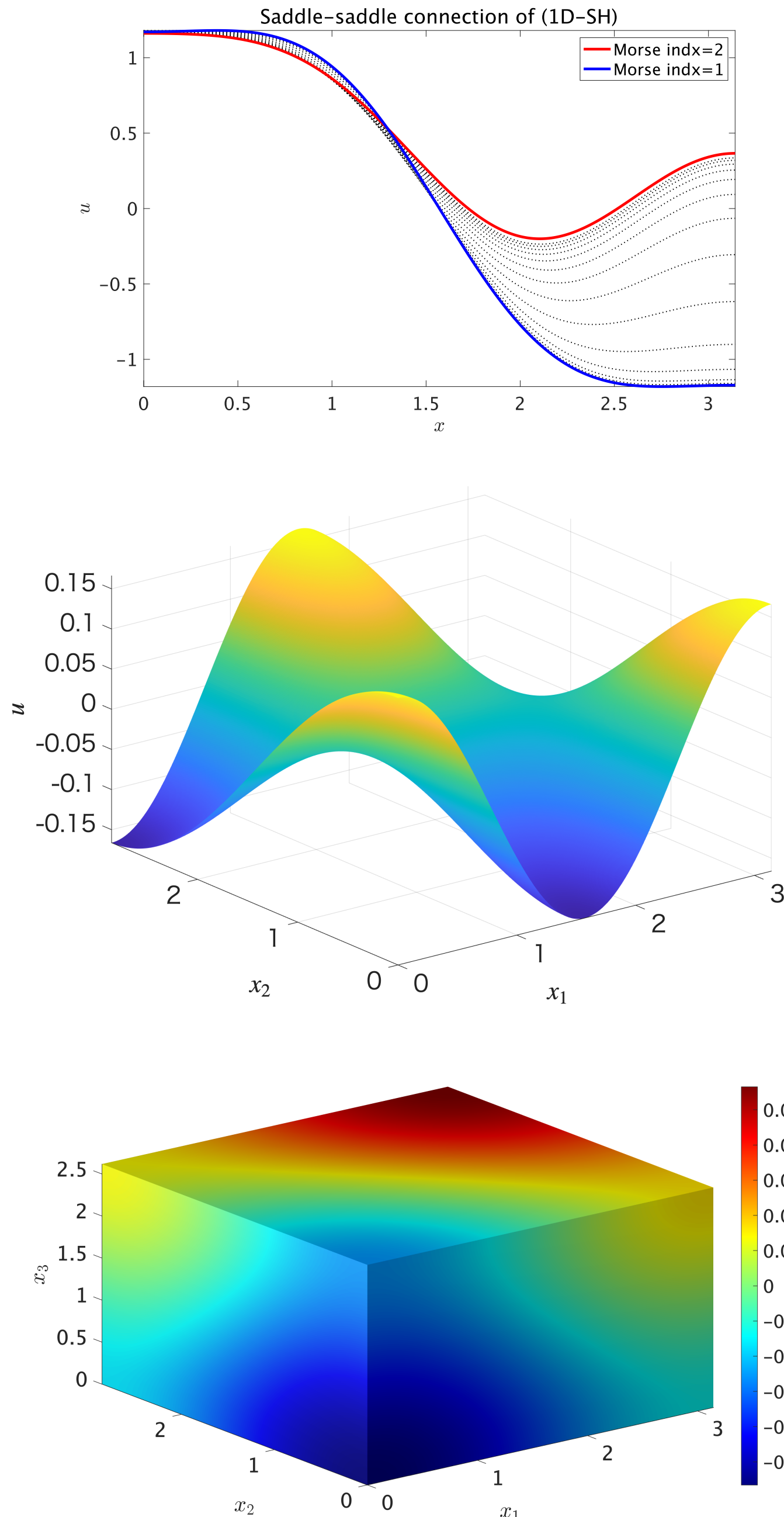
$$\dot{v} = \mathcal{L}v + \mathcal{Q}D\mathcal{N}(\bar{u})v, \quad v(0) = \phi$$

の解作用素 $v(t) = U(t, 0)\phi$ である. 写像 T の不動点を求めることで解 u を得る.

応用例

接続軌道の零点探索問題

$$F(\theta, \phi, u) = \begin{pmatrix} l(\theta) - 1 \\ u(\tau) - Q(\phi) \\ u - \tilde{T}(u, P(\theta)) \end{pmatrix} = 0.$$



ナビエ-ストークス方程式

3次元非圧縮性NS方程式

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u + f \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases}$$

大域存在シナリオ (渦度方程式) と爆発シナリオ (旋回を伴う軸対称NS方程式) の二つに分けて研究. 研究の目標はそれぞれ

- 渦度方程式のある初期値からの時間大域解の存在
- 旋回を伴う軸対称NS方程式の非自明平衡解の存在

を計算機援用証明すること. ミレニアム懸賞問題の解決の足掛かりになる成果に期待.

