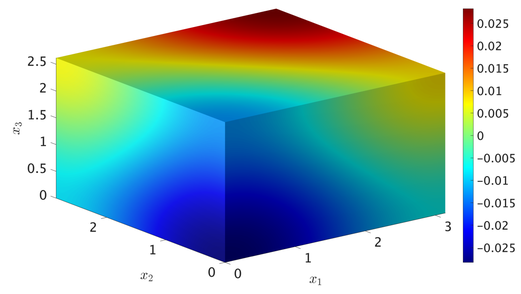
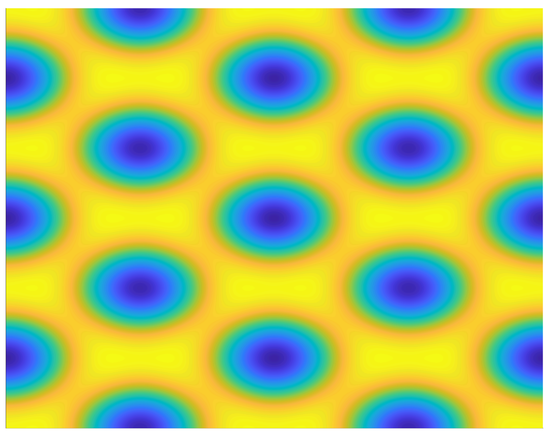
高安研究室 (Reliable Computing Lab.)

研究テーマ:
精度保証付き数値計算理論に関する研究と無限次元力学系の計算機援用証明への応用

info@taklab.org

無限次元力学系に対する計算機援用証明





Swift-Hohenberg方程式：流体のモデル

$$u_t = \sigma u - (1+\Delta)^2 u - u^3.$$

Ohta-Kawasaki方程式：材料化学のモデル

$$u_t = -\Delta\left(\varepsilon^2 \Delta u + u - u^3\right) - \sigma(u - \lambda).$$

Kuramoto-Sivashinsky方程式：化学反応のモデル

$$u_t + \Delta u + \Delta^2 u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = 0.$$

Phase field crystalモデル：原子結晶の進展モデル

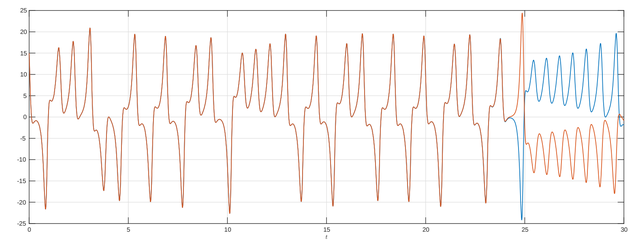
$$u_t = \left(u_{xxxx} + 2u_{xx} + (1-\alpha)u + u^3\right).$$

Navier-Stokes方程式：流体力学の基礎方程式

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\nabla p + \nu\Delta\vec{u} \\ \nabla\cdot\vec{u} = 0 \end{cases}$$

などの時間発展を伴う偏微分方程式の**大域的なダイナミクスと時間大域解の存在を計算機援用証明**する.

常微分方程式



常微分方程式の初期値問題：

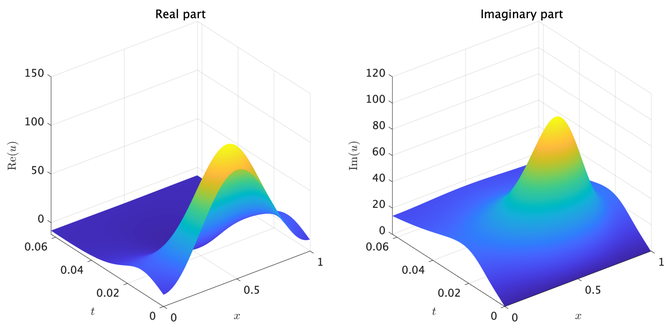
$$u_t = f(u(t),t)\ (t>0),\ u(0) = u_0$$

を考える. 解を数値計算すると, 上図ように同じ方程式を計算しているのに途中から違う軌道を計算することがある. **どちらが正しいのか？あるいはどちらも正しくないのか？**

これを解決するために数値計算の正しさを数学の証明付きで数値計算する. 先行研究では解のTaylor級数を間違えずに計算するのに対して, 本研究ではFFTアルゴリズムを駆使するChebyshev級数による関数近似を使用して, **解の軌道を高速・高精度に正しく数値計算する**方法を実現する.

半群理論

解析半群, **発展作用素**という数学の理論（関数解析学）における道具を精度保証付き数値計算に巧く利用する.



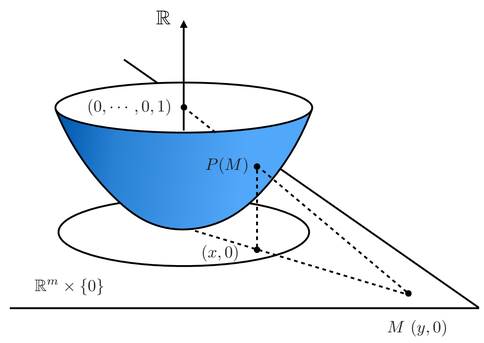
[1] Reliable computing, 25 (2017), 74–99.

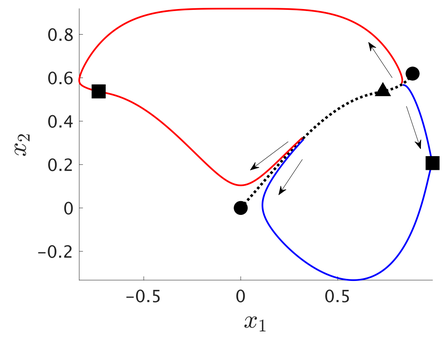
[2] SIAM J. Numer. Anal., 55:2 (2017), 980–1001.

[3] J. Comput. Appl. Math., 315 (2017), 1–16.

微分方程式の爆発解

微分方程式の解の有限時間爆発を精度保証付き数値計算で捉える. 時空間の特異性を解消することで, 実数区間の中に解の**爆発時刻を厳密に包含**する. さらに擬斉次コンパクト化という変数変換方法を提案し, 考えることができる問題の範囲を拡げた. 解の爆発は数理モデルの破綻を意味し, これを数値計算で厳密に把握することは**数理モデルの検証において有効**.



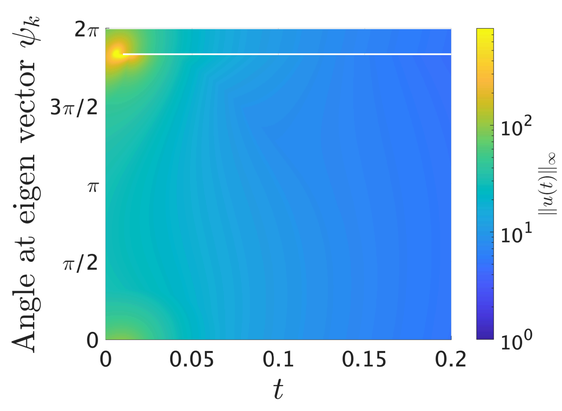


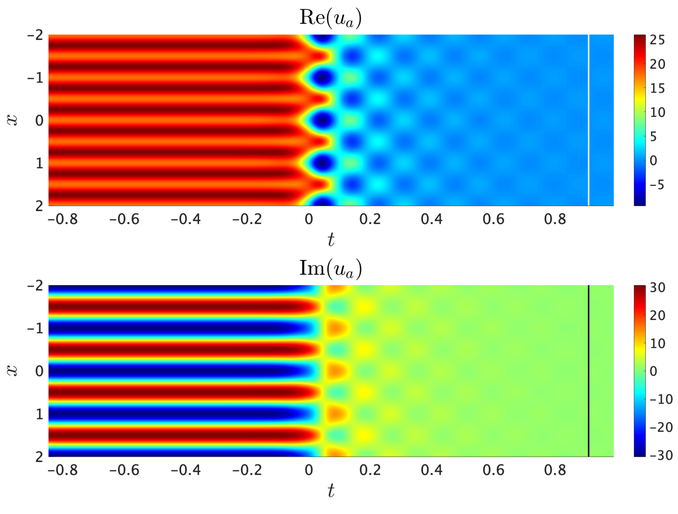
[4] Journal of Computational and Applied Mathematics, 314 (2017), 10–29.

[5] Numerische Mathematik, 145 (2020), 605–654.

[6] *Saddle-Type Blow-Up Solutions with Computer-Assisted Proofs: Validation and Extraction of Global Nature*, J. Nonlinear Sci., 33:3 (2023), 46.

時間発展方程式に対する解の精度保証付き数値計算





非線形熱方程式：$u_t = \Delta u + u^p$ や変数係数移流方程式：$u_t + c(x)u_x = 0$ の数値解の精度を数理解析の半群理論（C_0半群, 解析半群, 発展作用素）で保証.

複素Ginzburg-Landau方程式：偏微分方程式

$$u_t = e^{\mathrm{i}\theta}\left(u_{xx} + u^2\right),\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

の解の時間局所存在を数値検証し, **解の大域挙動を計算機援用証明**する. 非線形解析と作用素論の融合による最先端の研究.

非線形Schrödinger方程式：物理の数理モデル

$$u_t = \mathrm{i}\left(u_{xx} + u^2\right)$$

に対して, **数学解析で難しい大域解の存在に関する予想を数値計算を用いて証明**する.

[7] Jpn. J. Ind. Appl. Math., 36:2 (2019), 357–384.

[8] RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B82 (2020), 47–66.

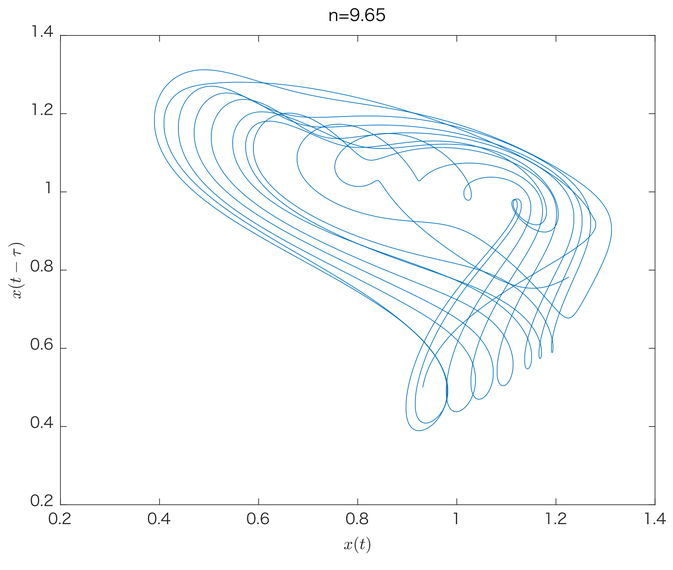
[9] Numerische Mathematik, 151 (2022), 693–750.

[10] Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 107 (2022), 106188.

[11] Advances in Mathematics, 398 (2022), 108234.

遅延微分方程式

遅延微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t-\tau)),\quad x(t) = \varphi(t)\ (-\tau \le t \le 0)$$

の解を精度保証付きで得る. 遅延微分方程式は時間発展する関係式に過去の情報を参照することで数理モデルの現象の表現能力が高いとされる. しかし, 遅延微分方程式の初期値問題に対する精度保証付き数値計算はこれまで先行研究がほとんどないため, 方法を確立する.