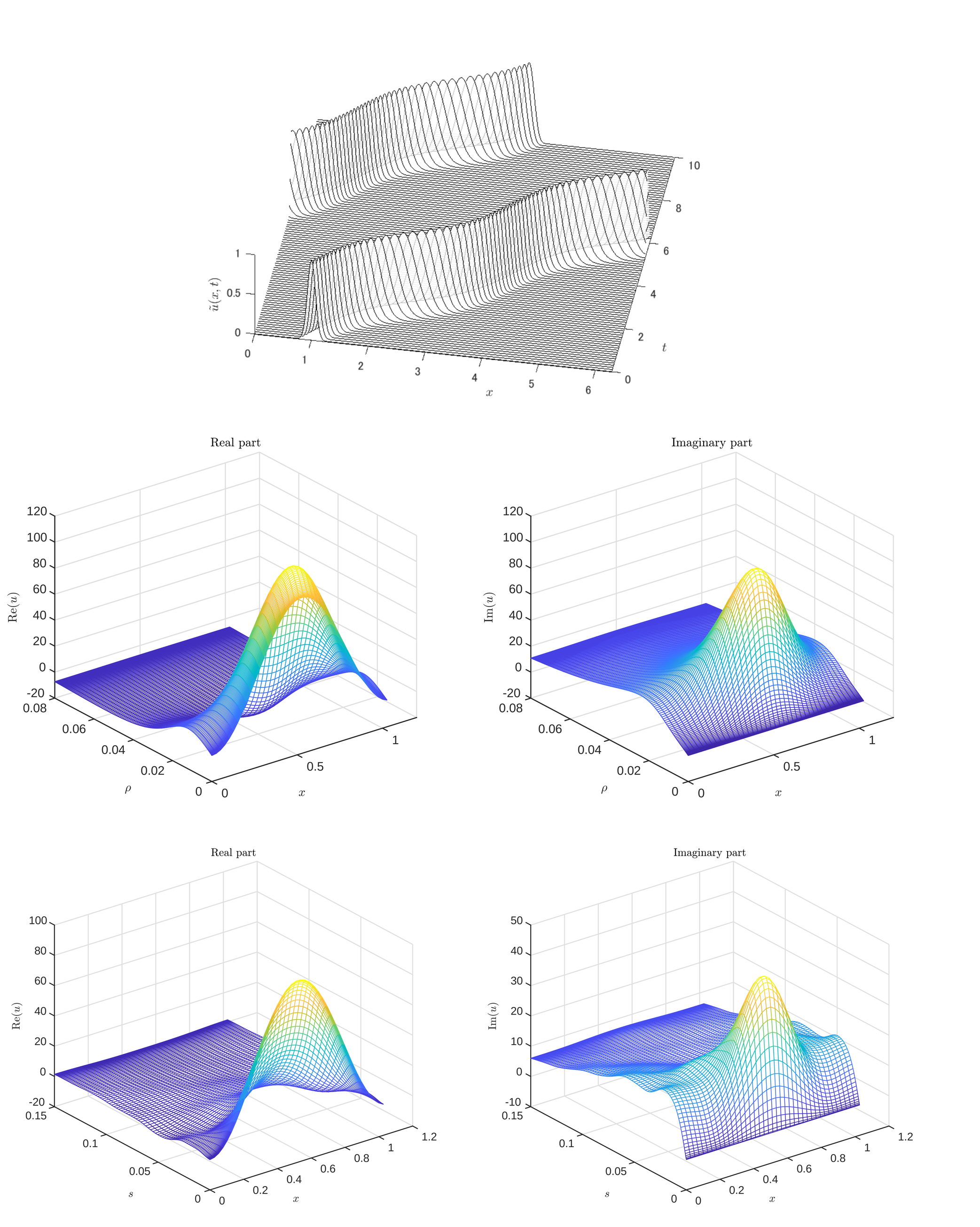
高安研究室 (Reliable Computing Lab.)

研究テーマ:
精度保証付き数値計算理論に関する研究と無限次元力学系の計算機援用証明への応用
info@taklab.org

時間発展方程式に対する解の精度保証付き数値計算



変数係数移流方程式：$u_t + c(x)u_x = 0$ の数値解の精度を数学理論（C_0半群）で保証 [1].

複素Ginzburg-Landau方程式：偏微分方程式

$$u_t = e^{\mathrm{i}\theta}\left(u_{xx} + u^2\right),\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

の解の時間局所存在を数値検証し，**解の大域挙動を計算機援用証明する**．非線形解析と作用素論の融合による最先端の研究 [2].

非線形Schödinger方程式：物理の数理モデル

$$u_t = \mathrm{i}\left(u_{xx} + u^2\right)$$

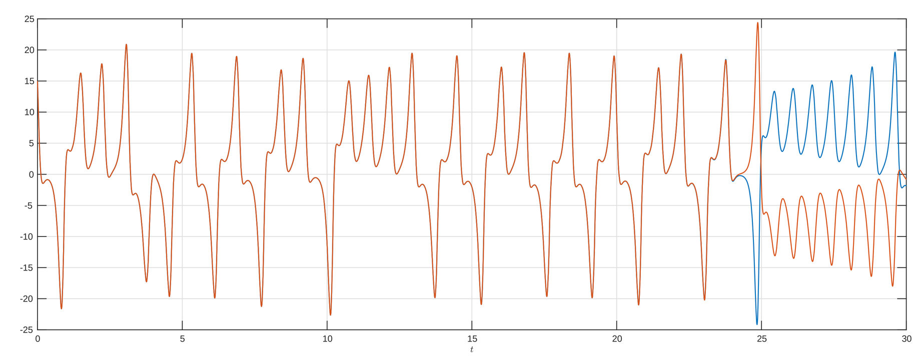
に対して，数学解析では難しい大域解の存在に関する**予想を数値計算を用いて証明** [3] する．

[1] Jpn. J. Ind. Appl. Math., 36:2 (2019), 357–384.

[2] *Rigorous numerics for nonlinear heat equations in the complex plane of time*, arXiv:1910.12472.

[3] *Global dynamics in nonconservative nonlinear Schrödinger equations*, arXiv:2012.09734.

常微分方程式



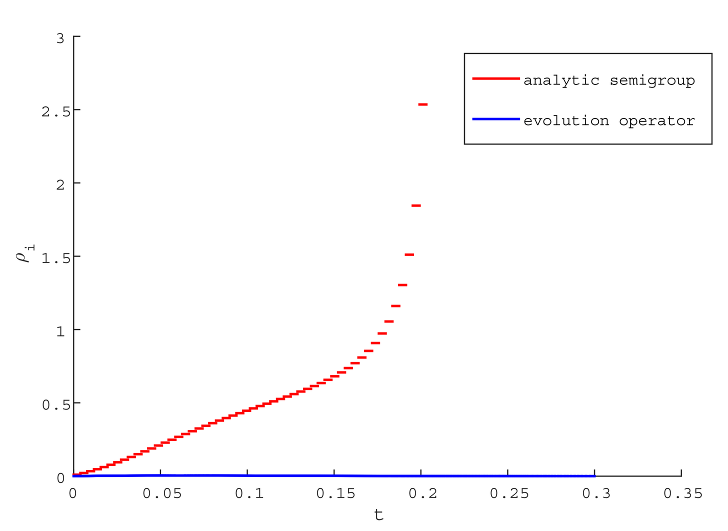
常微分方程式の初期値問題：

$$u_t = f(u(t), t)\ (t > 0),\ u(0) = u_0$$

を考える．解を数値計算すると，上図ように同じ方程式を計算しているのに途中から違う軌道を計算することがある．どちらが正しいのか？あるいはどちらも正しくないのか？
これを解決するために数値計算の正しさを数学の証明付きで数値計算する．先行研究では解のTaylor級数を間違えずに計算するのに対して，本研究ではChebyshev級数を使用して，**解の軌道を高速・高精度に正しく数値計算する**方法を実現する．

半群理論

解析半群，**発展作用素**という数学の理論（関数解析学）における道具を精度保証付き数値計算に巧く利用する [3–5].



[4] Reliable computing, 25 (2017), 74–99.

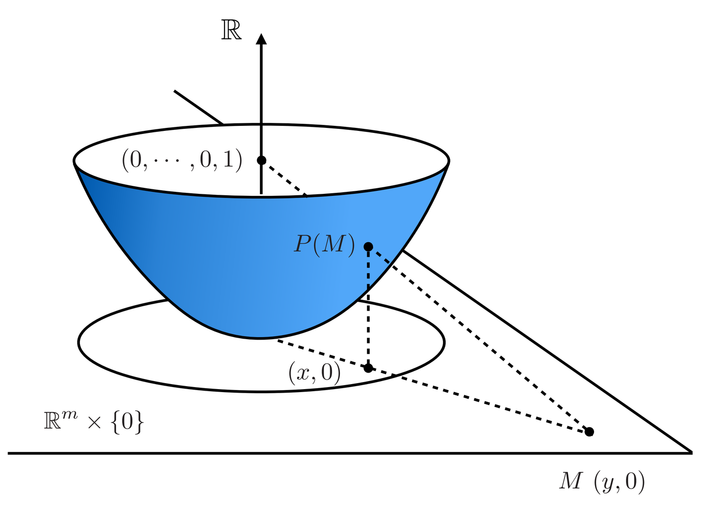
[5] SIAM J. Numer. Anal., 55:2 (2017), 980–1001.

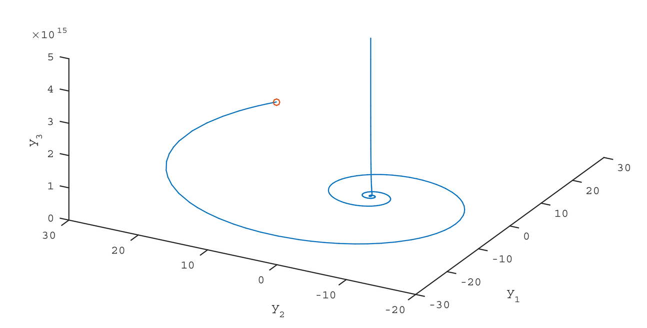
[6] J. Comput. Appl. Math., 315 (2017), 1–16.

微分方程式の爆発解

微分方程式の解の有限時間爆発を精度保証付き数値計算で捉える．時空特異性をそれぞれ解消する [6] ことで，実数区間の中に解の**爆発時刻を厳密に包含する**．

擬斉次コンパクト化という空間特異性解消方法を提案 [7] し，[6]の方法で考えることができる問題の範囲を拡げた．解の爆発は数理モデルの破綻を意味し，これを数値計算で厳密に把握することは**数理モデルの検証において有効な手段**．



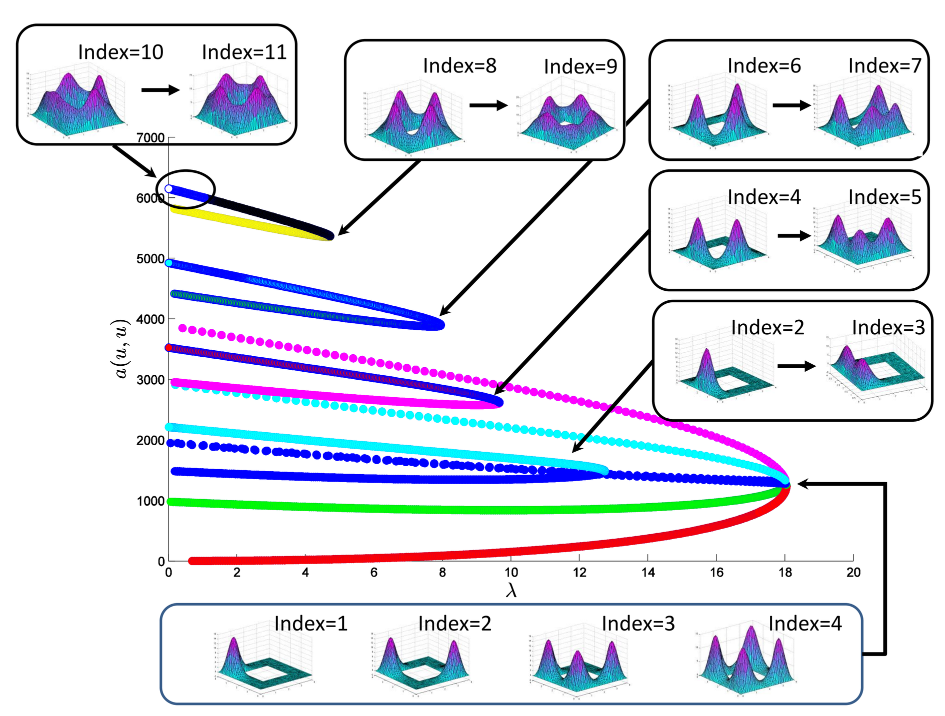


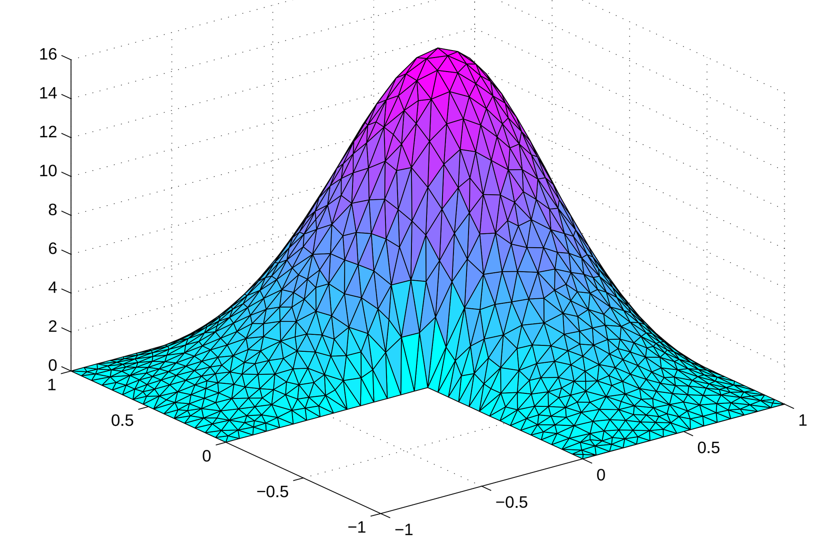
[7] *Numerical validation of blow-up solutions of ordinary differential equations*, J. Comput. Appl. Math., 314 (2017), 10–29.

[8] *Numerical validation of blow-up solutions with quasi-homogeneous compactifications*, Numer. Math., 145 (2020), 605–654.

非線形境界値問題の多重解

非線形楕円型偏微分方程式の境界値問題には解が無数に存在する場合がある．これらを**数値計算によって正しく区別し，解の性質を知る**方法を実現 [8–11] する．特に，偏微分方程式の解を数値計算する強力な手法である有限要素法をベースにする [9] と，数学解析が不可能な任意多角形領域上に定義された境界値問題の解が扱える [11] ようになる．





多重解を理解するため，**解の分岐構造を明らかにする**．精度保証付き数値計算により正しく追跡する方法 [12] により，多重解の裏に隠れた解の多様な構造を見ることができる．
例えば，穴の空いた領域上のある楕円型偏微分方程式に対する解の分岐構造は上の図ように非常に複雑で豊かな構造をしている．しかし，これを全て精度保証付き数値計算によって分類することは**未解決問題**である．

[9] Jpn. J. Ind. Appl. Math., 31:3 (2014), 665–679.

[10] NOLTA, IEICE, 5:1 (2014), 53–63.

[11] NOLTA, IEICE, 5:1 (2014), 64–79.

[12] NOLTA, IEICE, 4:1 (2013), 34–61.

[13] *A verified continuation algorithm for solution curve of nonlinear elliptic equations*, Proc. of 2013 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2013), 441–444.

遅延微分方程式

遅延微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t-\tau)),\quad x(t) = \varphi(t)\ (-\tau \le t \le 0)$$

の解を精度保証付きで得る．遅延微分方程式は時間発展する関係式に過去の情報を参照することで数理モデルの現象の表現能力が高いとされる．しかし，遅延微分方程式の初期値問題に対する精度保証付き数値計算はこれまで先行研究がほとんどないため，方法を確立する．