

# Fourier-Laplace 変換を用いた 1 次元拡散方程式の一般解の導出

仙波大征      羽田野祐子

2021 年 1 月 28 日

## 1 Fourier-Laplace 変換およびその逆変換

はじめに, 一般的な拡散方程式は以下の形で与えられる.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \text{ for } -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \quad (1)$$

初期条件は,

$$p(x, t = 0) = A\delta(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

である. ここに,  $K$  は拡散係数,  $A$  は拡散物質の総量である.

(1) の両辺を Fourier 変換すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} &= K(-ik)^2 \tilde{p} \\ &= -Kk^2 \tilde{p} \end{aligned} \quad (3)$$

となる. 続いて両辺を Laplace 変換すると,

$$s\hat{p} - \tilde{p}(k, 0) = -Kk^2 \hat{p}$$

となるが, 左辺第 2 項は (2) より

$$\tilde{p}(k, 0) = \mathcal{F}[p(x, t = 0)] = \mathcal{F}[A\delta(x)] = A \quad (4)$$

であることを踏まえると,

$$\begin{aligned} \hat{p}(k, s) &= \frac{A}{Kk^2 + s} \\ &= \frac{A}{K} \frac{1}{k^2 + \frac{s}{K}} \end{aligned} \quad (5)$$

となる.

次に, (5) の両辺を Fourier 逆変換すると,

$$\begin{aligned}\hat{p}(x,s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{A}{K} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \frac{s}{K}} e^{ikx} dk \\ &= \frac{A}{2\pi K} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(k+i\sqrt{\frac{s}{K}})(k-i\sqrt{\frac{s}{K}})} dk\end{aligned}\quad (6)$$

となる.

(6) 式右辺の積分は複素積分を用いて処理する. この被積分関数は  $k = \pm i\sqrt{\frac{s}{K}}$  を一位の極にもつが, Laplace 変換に用いられる複素数  $s$  については  $\Re[s] > 0$  であることから,

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} &< \arg(s) < \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} &< \arg\left(\sqrt{\frac{s}{K}}\right) < \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} &< \arg\left(+i\sqrt{\frac{s}{K}}\right) < \frac{3}{4}\pi\end{aligned}\quad (7)$$

であり, 同様の議論から

$$-\frac{3}{4}\pi < \arg\left(-i\sqrt{\frac{s}{K}}\right) < -\frac{\pi}{4}\quad (8)$$

である. ゆえに  $x$  の符号で場合分けされた次の図 1, 図 2 に示す積分経路を考えればよい.

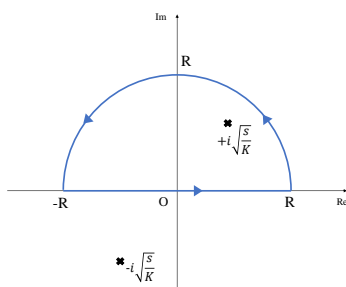


図 1:  $x > 0$  における積分路 (upper)

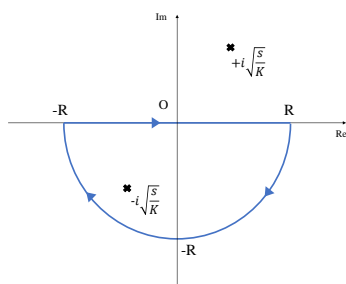


図 2:  $x < 0$  における積分路 (lower)

図1, 図2において  $R \rightarrow \infty$  とすることで求める積分が得られる. すると留数定理より,

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(x,s) &= \begin{cases} \frac{A}{2\pi K} \oint_{\text{upper}} \frac{e^{ikx}}{(k+i\sqrt{\frac{s}{K}})(k-i\sqrt{\frac{s}{K}})} dk & (x > 0) \\ \frac{A}{2\pi K} \oint_{\text{lower}} \frac{e^{ikx}}{(k+i\sqrt{\frac{s}{K}})(k-i\sqrt{\frac{s}{K}})} dk & (x < 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{A}{2\pi K} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res} [\cdot; k = +i\sqrt{\frac{s}{K}}] & (x > 0) \\ -\frac{A}{2\pi K} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res} [\cdot; k = -i\sqrt{\frac{s}{K}}] & (x < 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{A}{2\pi K} \cdot 2\pi i \lim_{k \rightarrow +i\sqrt{\frac{s}{K}}} \frac{e^{ikx} (k - i\sqrt{\frac{s}{K}})}{(k + i\sqrt{\frac{s}{K}}) (k - i\sqrt{\frac{s}{K}})} & (x > 0) \\ -\frac{A}{2\pi K} \cdot 2\pi i \lim_{k \rightarrow -i\sqrt{\frac{s}{K}}} \frac{e^{ikx} (k + i\sqrt{\frac{s}{K}})}{(k + i\sqrt{\frac{s}{K}}) (k - i\sqrt{\frac{s}{K}})} & (x < 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{A}{2\pi K} \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{K}}x}}{2i\sqrt{\frac{s}{K}}} & (x > 0) \\ -\frac{A}{2\pi K} \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{+\sqrt{\frac{s}{K}}x}}{-2i\sqrt{\frac{s}{K}}} & (x < 0) \end{cases} \\
 &= \frac{A}{2\sqrt{K}} e^{-\sqrt{\frac{s}{K}}|x|} \frac{1}{\sqrt{s}} \tag{9}
 \end{aligned}$$

となる.

続いて, (9) の両辺を Laplace 逆変換すると,

$$p(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{A}{2\sqrt{K}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-\sqrt{\frac{s}{K}}|x|} e^{st} \frac{1}{\sqrt{s}} ds \tag{10}$$

となる ( $c$  はすべての特異点よりも右にある正の実数). (10) 式の積分は Bromwich 積分と呼ばれるが, 被積分関数は原点  $s=0$  を岐点として持つため, それを回避するように次の図3に示す積分経路を考える.

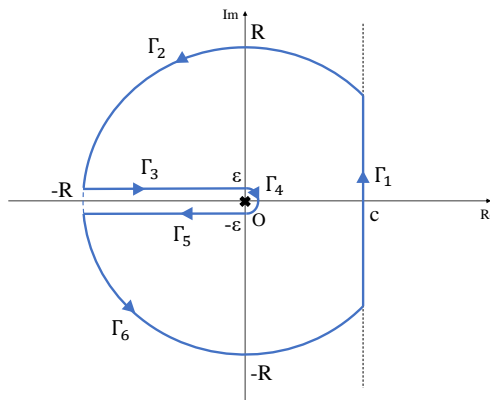


図3: Bromwich 積分を実行するための積分経路

$R \rightarrow \infty$  とすることで,  $\Gamma_1$  に沿った線積分が求める Bromwich 積分となる. また,  $\varepsilon \rightarrow 0$  である. 図 3 の経路内に特異点は含まれていないので, Cauchy の積分定理より

$$\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_5} + \int_{\Gamma_6} = 0$$

である. したがって,

$$p(x,t) = \int_{\Gamma_1} = -\int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_3} - \int_{\Gamma_4} - \int_{\Gamma_5} - \int_{\Gamma_6} \quad (11)$$

である.

続く 2 章では, (11) 式最右辺にある 5 つの線積分のうち, やや複雑な議論を要する  $\int_{\Gamma_2}$  と  $\int_{\Gamma_6}$  について論じることとする.

## 2 $\int_{\Gamma_2}$ および $\int_{\Gamma_6}$ の収束評価

### ・ $\int_{\Gamma_2}$ について

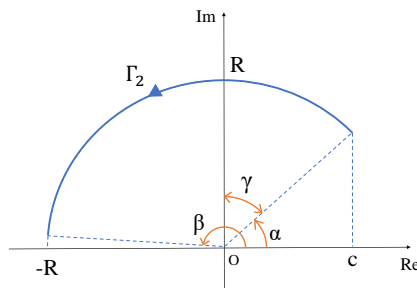


図 4:  $\Gamma_2$  における変数変換および  $\theta$  の積分区間の設定

$s = Re^{i\theta}$ ,  $\theta: \alpha \rightarrow \beta$  とすると (図 4),

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{A}{2\sqrt{K}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{\sqrt{Re^{i\theta}}}{\sqrt{K}}|x|} e^{Re^{i\theta}t} \frac{1}{\sqrt{Re^{i\theta}}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{A}{4\pi\sqrt{K}} \sqrt{R} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{\sqrt{R}|x|}{\sqrt{K}}e^{i\frac{\theta}{2}}} \cdot e^{Rte^{i\theta}} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} d\theta \end{aligned}$$

いま, 3 つの指数関数それぞれに対し絶対値による評価を行うと,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} \right| &\leq \frac{A}{4\pi\sqrt{K}} \sqrt{R} \int_{\alpha}^{\beta} | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | d\theta \\ &= \frac{A}{4\pi\sqrt{K}} \sqrt{R} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{\sqrt{R}|x|}{\sqrt{K}}\cos\frac{\theta}{2}} \cdot e^{Rt\cos\theta} \cdot 1 d\theta \end{aligned}$$

さらに、積分区間内において常に  $\cos(\frac{\theta}{2}) > 0$  であることから、

$$\begin{aligned} &\leq \frac{A}{4\pi\sqrt{K}}\sqrt{R}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{\sqrt{R}|\alpha|}{\sqrt{K}}\cdot 0} \cdot e^{Rt\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{A}{4\pi\sqrt{K}}\sqrt{R}\int_{\alpha}^{\beta} e^{Rt\cos\theta} d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

ここで、 $\cos\theta$  を 2本の直線によって評価する (図 5)。

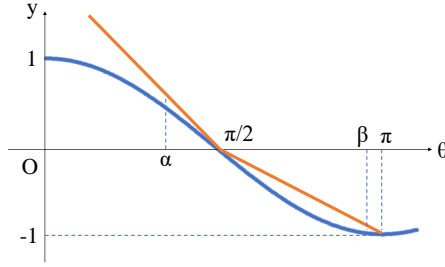


図 5: 直線による  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  での  $\cos\theta$  の上からの評価

ここに、 $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  においては  $\theta = \frac{\pi}{2}$  における接線によって評価し、  
 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \beta$  においては、2点  $(\frac{\pi}{2}, 0)$   $(\pi, -1)$  を通る直線によって評価している。以上より、

$$\cos\theta \leq \begin{cases} -\theta + \frac{\pi}{2} & (\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{2}{\pi}\theta + 1 & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \beta) \end{cases} \quad (13)$$

を得る。これを用いると、(12) 式の積分を区間ごとに上から評価することができ、

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_2} \\ &\leq \frac{A}{4\pi\sqrt{K}}\sqrt{R}\left\{\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt(-\theta+\frac{\pi}{2})} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} e^{Rt(-\frac{2}{\pi}\theta+1)} d\theta\right\} \\ &= \frac{A}{4\pi\sqrt{K}}\sqrt{R}\left\{\left[-\frac{1}{Rt}e^{Rt(-\theta+\frac{\pi}{2})}\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{\pi}{2Rt}e^{Rt(-\frac{2}{\pi}\theta+1)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\beta}\right\} \\ &= \frac{A}{4\pi\sqrt{K}}\sqrt{R}\left[\frac{1}{Rt}\left\{e^{Rt(\frac{\pi}{2}-\alpha)} - 1\right\} + \frac{\pi}{2Rt}\left\{1 - e^{Rt(1-\frac{2}{\pi}\beta)}\right\}\right] \\ &= \frac{A}{4\pi t\sqrt{K}}\frac{1}{\sqrt{R}}\left[\left\{e^{Rt(\frac{\pi}{2}-\alpha)} - 1\right\} + \frac{\pi}{2}\left\{1 - e^{Rt(1-\frac{2}{\pi}\beta)}\right\}\right] \end{aligned} \quad (14)$$

となる。最後に、(14) 式にある 2つの指数関数の収束性について議論する。

まず、 $R \rightarrow \infty$  のとき  $\beta \rightarrow \pi - 0$  となるから (図 4 を参照のこと)、

$$e^{Rt(1-\frac{2}{\pi}\beta)} \rightarrow 0$$

となる.

また,  $R \rightarrow \infty$  のとき  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$  であるが,  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$  とおくと  $\gamma \rightarrow +0$  となり,

$$\sin \gamma = \frac{c}{R} \Leftrightarrow R = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (15)$$

であるから (図 4),

$$e^{Rt(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = e^{\frac{c}{\sin \gamma} t \gamma} \rightarrow e^{ct} \left( \because \frac{\gamma}{\sin \gamma} \rightarrow 1 \right)$$

が成立する. したがって, はさみうちの原理から

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} &\rightarrow \frac{A}{4\pi t \sqrt{K}} \frac{1}{\sqrt{R}} \left\{ e^{ct} - 1 + \frac{\pi}{2}(1-0) \right\} \\ &\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (16)$$

となる.

・  $\int_{\Gamma_6}$  について

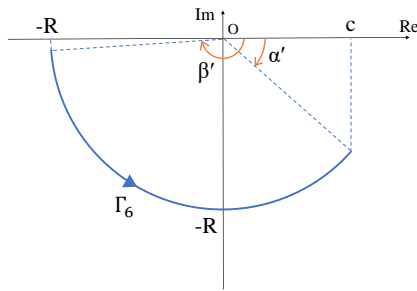


図 6:  $\Gamma_6$  における変数変換および  $\theta$  の積分区間の設定

$\Gamma_2$  のときと同様に  $s = Re^{i\theta}$ ,  $\theta: \beta' \rightarrow \alpha'$  とすると, 同様の議論から

$$\int_{\Gamma_6} \leq \frac{A}{4\pi\sqrt{K}} \sqrt{R} \int_{\beta'}^{\alpha'} e^{Rt \cos \theta} d\theta \quad (17)$$

を得る. ここで  $\varphi = -\theta$  とおくと  $d\varphi = -d\theta$ ,  $\varphi: -\beta' \rightarrow -\alpha'$  となり,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_6} &\leq \frac{A}{4\pi\sqrt{K}} \sqrt{R} \int_{-\beta'}^{-\alpha'} e^{Rt \cos(-\varphi)} (-d\varphi) \\ &= \frac{A}{4\pi\sqrt{K}} \sqrt{R} \int_{-\alpha'}^{-\beta'} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

と変形できるが, 図 4 と図 6 から明らかに

$$-\alpha' = \alpha, \quad -\beta' = \beta \quad (19)$$

であるから, (12) と (18) は同値である.  
したがって

$$\int_{\Gamma_6} = \int_{\Gamma_2} = 0 \quad (20)$$

となる.

### 3 $\int_{\Gamma_4}$ の収束評価および最終的な一般解の導出

続いて  $\int_{\Gamma_4}$  については,  $s = \varepsilon e^{i\theta}$  とおくと  $ds = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ ,  $\theta : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$  だから,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{A}{2\sqrt{K}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{|x|}{\sqrt{K}} e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{\varepsilon}} e^{\varepsilon t e^{i\theta}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-i\frac{\theta}{2}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{A}{2\sqrt{K}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} i\sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\sqrt{K}} e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{\varepsilon}} e^{\varepsilon t e^{i\theta}} e^{i\frac{\theta}{2}} d\theta \\ &\rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (21)$$

となる. よって, これまでの議論から

$$(11) \Leftrightarrow \int_{\Gamma_1} = -\int_{\Gamma_3} - \int_{\Gamma_5} \quad (22)$$

となる. したがって  $\int_{\Gamma_3}$  と  $\int_{\Gamma_5}$  のみ考えればよい.

$\int_{\Gamma_3}$  と  $\int_{\Gamma_5}$  については, それぞれ  $s = re^{+\pi i}$ ,  $s = re^{-\pi i}$  と変数変換でき, 積分区間はそれぞれ  $\infty \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow \infty$  である. そうすると,

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \int_{\Gamma_1} \\ &= -\int_{\Gamma_3} - \int_{\Gamma_5} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{A}{2\sqrt{K}} \left[ -\int_{\infty}^0 e^{-\frac{|x|}{\sqrt{K}} e^{+i\frac{\pi}{2}} \sqrt{r}} e^{t r e^{+\pi i}} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{+\pi i} dr - \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{\sqrt{K}} e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{r}} e^{t r e^{-\pi i}} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{+i\frac{\pi}{2}} e^{-\pi i} dr \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{A}{2\sqrt{K}} \left[ \int_0^{\infty} i e^{-\frac{|x|}{\sqrt{K}} e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{r}} e^{-tr} \frac{dr}{\sqrt{r}} + \int_0^{\infty} i e^{+\frac{|x|}{\sqrt{K}} e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{r}} e^{-tr} \frac{dr}{\sqrt{r}} \right] \\ &= \frac{A}{2\pi\sqrt{K}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \mathcal{R} \left[ e^{\frac{i|x|}{\sqrt{K}} \sqrt{r}} e^{-tr} \right] dr \end{aligned}$$

となる. 上式最後の変形については, 共役複素数の性質

$$z + \bar{z} = 2 \mathcal{R}[z] \quad (23)$$

を用いた.

ここで  $\sqrt{r} = y$  とおけば ( $dr = 2ydy, y: 0 \rightarrow \infty$ ),

$$\begin{aligned}
 p(x,t) &= \frac{A}{2\pi\sqrt{K}} \int_0^\infty \frac{1}{y} \mathcal{R} \left[ e^{\frac{i|x|}{\sqrt{K}}y - ty^2} \right] 2ydy \\
 &= \frac{A}{\pi\sqrt{K}} \int_0^\infty \mathcal{R} \left[ e^{-t(y - \frac{i|x|}{2t\sqrt{K}})^2 - \frac{x^2}{4tK}} \right] dy \\
 &= \frac{A}{\pi\sqrt{K}} e^{-\frac{x^2}{4tK}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty e^{-t(y + \frac{i|x|}{2t\sqrt{K}})^2} dy + \int_0^\infty e^{-t(y - \frac{i|x|}{2t\sqrt{K}})^2} dy \right] \\
 &= \frac{A}{2\pi\sqrt{K}} e^{-\frac{x^2}{4tK}} \left[ \int_0^\infty e^{-t(y + \frac{i|x|}{2t\sqrt{K}})^2} dy + \int_{-\infty}^0 e^{-t(y' + \frac{i|x|}{2t\sqrt{K}})^2} dy' \right] \\
 &= \frac{A}{2\pi\sqrt{K}} e^{-\frac{x^2}{4tK}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t(y + \frac{i|x|}{2t\sqrt{K}})^2} dy
 \end{aligned}$$

となる. 上式2つ目の変形については, (23) の関係式を再び用いた.

最後に  $\sqrt{t} \left( y + \frac{i|x|}{2t\sqrt{K}} \right) = z$  とおけば ( $dy = \frac{dz}{\sqrt{t}}, z: -\infty \rightarrow \infty$ ),

$$\begin{aligned}
 p(x,t) &= \frac{A}{2\pi\sqrt{K}} e^{-\frac{x^2}{4tK}} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{t}} \\
 &= \frac{A}{2\pi\sqrt{K}} e^{-\frac{x^2}{4tK}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \\
 &= \frac{A}{\sqrt{4\pi K t}} e^{-\frac{x^2}{4tK}} \tag{24}
 \end{aligned}$$

となり, よく知られた一般解が得られる.